Διαφ. Εξισώσεις

12/12/21

$$\left.\begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right| \text{Πρόβλημα αρχικών τιμών}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b \\ y(x_0) = yb_1 \\ y'(x_0) = yb_2 \end{array}\right\} \text{Π.Α.Τ}$$

Άσκηση

$y' + y = x \quad , \ x \in [0,\pi]$

$$\begin{array}{l|l|l} y(0) = 2 & y(0) = 2 & y(0) = 2 \\ y(\pi) = 1 & y(\pi/2) = 1 & y(\pi) = \pi - 2 \end{array}$$

$$\lambda^2 + 1 = p(x)$$
$$\downarrow$$
$$\pm i$$

$B.S.\Lambda = \{\cos x, \sin x\}$

$y_p = x$: μερική λύση

$$\boxed{y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x} \quad , \ x \in [0,\pi]$$

- $\left.\begin{array}{l} y(0) = 2 \\ y(\pi) = 1 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} 2 = c_1 \\ 1 = -2 + \pi \ \text{Ατοπο} \end{array}$: Δεν υπάρχει λύση

- $\left.\begin{array}{l} y(0) = 2 \\ y(\pi/2) = 1 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} 2 = c_1 \\ 1 = c_2 + \pi/2 \end{array}$: Ακριβώς μία λύση

$\left.\begin{array}{l} y(0) = 2 \\ y(\pi) = \pi - 2 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} c_1 = 2 \\ \pi - 2 = \pi - 2 \end{array}$: Άπειρες λύσεις

δηλ. $y(x) = 2\cos x + c\sin x + x$

Παρατηρήσεις

(E): $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b$ || (E_0) αν $b=0$ $x \in [a,b]$

$$\left.\begin{aligned} l_1[y] &= b_{11}y(a) + b_{12}y'(a) + c_{11}y(b) + c_{12}y'(b) = A \\ l_2[y] &= b_{21}y(a) + b_{22}y'(a) + c_{21}y(b) + c_{22}y'(b) = B \end{aligned}\right\} C_{A,B}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Ας είναι $\{y_1, y_2\}$: Β.Σ.Λ της (E_0) τότε:

i) $D = \begin{vmatrix} l_1[y_1] & l_1[y_2] \\ l_2[y_1] & l_2[y_2] \end{vmatrix} \neq 0 \iff$ το ομογενές π.α.τ. $(E_0 - C_0)$ έχει μόνο την μηδενική λύση.

ii) $D \neq 0 \iff$ το μη ομογενές π.α.τ. $(E - C)$ έχει ακριβώς μια λύση.

Απόδειξη

Ας είναι $y(x) = \kappa y_1(x) + \lambda y_2(x)$ λύση του $(E_0 - C_0)$

Η y ικανοποιεί τις $l_1[y]=0$, $l_2[y]=0$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= b_{11}[\kappa y_1(a) + \lambda y_2(a)] + \dots + c_{12}[\kappa y_1'(b) + \lambda y_2'(b)] \\ 0 &= b_{21}[\kappa y_1(a) + \lambda y_2(a)] + \dots + c_{22}[\kappa y_1'(b) + \lambda y_2'(b)] \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 0 &= \kappa l_1[y_1] + \lambda l_1[y_2] \\ 0 &= \kappa l_2[y_1] + \lambda l_2[y_2] \end{aligned}$$

Το γραμμικό ομογενές σύστημα (ως προς κ,λ) έχει μη μηδενικές λύσεις αν και μόνο αν $D=0$.

ή έχει μόνο την μηδενική λύση αν και μόνο αν $D \neq 0$.

Παράδειγμα

$y'' + 2y' + 5y = 0$, $x \in [0, \pi/2]$

$y(0)=0$, $y(\pi/2)=0$. Πόσες λύσεις έχει;

Λύση

Β.Σ.Λ $\{e^{-x}\cos 2x, e^{-x}\sin 2x\}$

$l_1[y] = y(0)$ || $D = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_2(\pi/2) & y_1(\pi/2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -e^{-\pi/2} & 0 \end{vmatrix} = 0$

$l_2[y] = y(\pi/2)$

(E): $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$ // $a_2(x) \neq 0$, $x \in [a,b]$

$$y'' + \frac{a_1}{a_2} y' + \frac{a_0}{a_2} y = \frac{b(x)}{a_2}$$

$$\left[e^{\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds} y' \right]' + \frac{a_0}{a_2} e^{\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds} y = \frac{b(x)}{a_2} e^{\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds}$$

$$(p(x) y')' + q(x) y = f(x)$$

(E_0): $(p(x)y')' + q(x) y = 0$ // $p(x) > 0$, $p \in C^1[a,b]$

$\to (\Delta)$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Abel)

Ας είναι y_1, y_2 λύσεις της (Δ), τότε: $p(x) W(x) = k$, $x \in [a,b]$.

Απόδειξη

(A) $[p(x) W(x)]' = [p(x) (y_2'(x) y_1(x) - y_1'(x) y_2(x))]' = p' y_2' y_1 + p (y_2' y_1)' - p'(y_1' y_2) - p(y_1' y_2)'$

$$= \dots = 0$$

(B) τρ. Είναι $p(x) = e^{\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds}$

Liuville: $W(y_1,y_2)(x) = W(y_1,y_2)(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds}$

$$p(x) W(y_1,y_2)(x) = W(y_1,y_2)(x_0) = k, \quad x \in [a,b]$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα πρόβλημα αρχ. τιμών

$(py')' + qy = 0$ | $(py')' + (q + \lambda r) y = 0$

$l_1[y]$, $l_2[y]$ | λ: σταθερά, $r: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής

Μια τιμή της παραμέτρου λ για την οποία το πρόβλημα αρχικών τιμών

(S): $(py')' + (q + \lambda r) y = 0$

(C) $\begin{cases} a_1 y(a) + a_2 y(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y(b) = 0 \end{cases}$ | $|a_1| + |a_2| > 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$ έχει λύση, λέγεται ιδιοτιμή της $(S\text{-}C)$

Οι λύσεις του (S-L) που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_0 καλούνται συναρτήσεις που αντιστοιχούν στην λ_0.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Οι συναρτήσεις $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ θα καλούνται ορθογώνιες ως προς τη συνάρτηση βάρους r αν

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, r(x)\, dx = 0$$

Οι ιδιοτιμές είναι μια ακολουθία που τείνει στο ∞